Mécanismes de transport

Causes du transport :

Système *hors équilibre* thermodynamique.

De manière générale :

Il y a une *non-uniformité* d'une grandeur *intensive* Y.

- On quantifie cette inhomogénéité par le *gradient* : $\dfrac{dY(x)}{dx}$ Exemples : $\dfrac{dT(x)}{dx}$; $\dfrac{d\rho(x)}{dx}$; $\dfrac{dV(x)}{dx}$

Transfert thermique, diffusion, courant électrique

Hors programme de l'examen

- La notion se généralise en 3D sous forme d'un *vecteur* :

Noté : $\boxed{\overrightarrow{Grad}\,Y = \vec{\nabla}Y = \begin{bmatrix} \dfrac{dY}{dx} \\ \dfrac{dY}{dy} \\ \dfrac{dY}{dz} \end{bmatrix}}$

Exemple, gradient de température : $\begin{bmatrix} \dfrac{dT(\vec{r})}{dx} \\ \dfrac{dT(\vec{r})}{dy} \\ \dfrac{dT(\vec{r})}{dz} \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{Grad}\,T = \vec{\nabla}T = \begin{bmatrix} \dfrac{dT(\vec{r})}{dx} \\ \dfrac{dT(\vec{r})}{dy} \\ \dfrac{dT(\vec{r})}{dz} \end{bmatrix}$

Vecteur densité de courant

Hors programme de l'examen

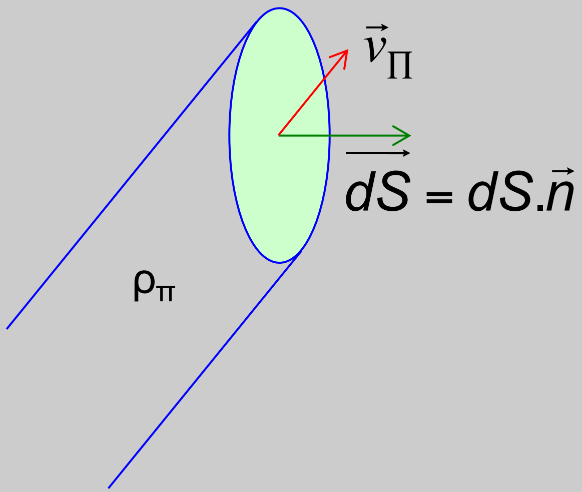
- La définition se généralise en 3D sous une forme vectorielle. On appelle *vecteur densité de courant* le vecteur :

$$\boxed{\vec{J}_\Pi = \rho_\Pi \vec{v}_\Pi}$$

- L'intensité de la propriété ξ qui traverse la surface S est le *flux* de J_ξ à travers S :

$$d\phi_\Pi = \rho_\Pi dS \vec{v}_\Pi \cdot \vec{n}$$
$$= \vec{J}_\Pi \cdot \overrightarrow{dS}$$

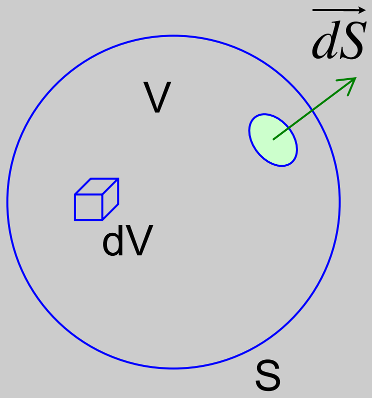
$$\boxed{I_\Pi = \iint_S \vec{J}_\Pi \overrightarrow{dS} = \iint_S \vec{J}_\Pi \vec{n}\, dS}$$



Equation de continuité

Hors programme de l'examen

- L'équation peut se généraliser en 3D sous la forme :



$$\overrightarrow{dS} = dS \cdot \vec{n}$$

$$\vec{J}_\Pi = \rho_\Pi \vec{v}_\Pi = \begin{bmatrix} J_\Pi^x \\ J_\Pi^y \\ J_\Pi^z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho_\Pi}{\partial t} + \overrightarrow{Div}\, \vec{J}_\Pi = \sigma_\Pi}$$

Equation de continuité

Avec :

$$\overrightarrow{Div}\, \vec{J}_\Pi = \vec{\nabla} \vec{J}_\Pi = \frac{\partial J_\Pi^x}{\partial x} + \frac{\partial J_\Pi^y}{\partial y} + \frac{\partial J_\Pi^z}{\partial z}$$

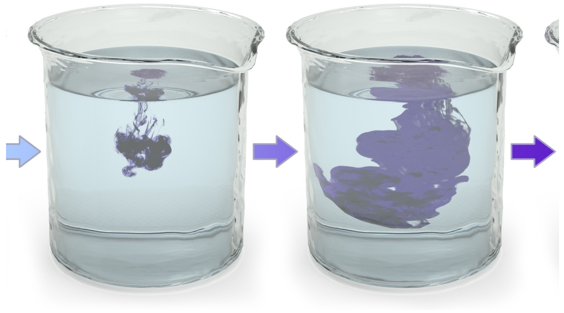
Note : moyen mnémotechnique, manipuler ∇ comme un vecteur.

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{Grad}\, U = \vec{\nabla} U(\vec{r})$$

$$\overrightarrow{Div}\, \vec{J} = \vec{\nabla} \vec{J}$$

$$Rot\, \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r})$$



Adolf Fick
1829 - 1901

Loi de Fick

- La loi de Fick est une loi phénoménologique* qui établit une relation de proportionnalité entre le vecteur densité de courant et le gradient de concentration :

$$\boxed{J_n(x,t) = -D\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial x}}$$

Ou bien en 3D : $\boxed{\vec{J}_n(\vec{r},t) = -D\vec{\nabla}.\rho_n(\vec{r},t)}$

Hors programme de l'examen

Le coefficient D s'appelle *coefficient de diffusion*.

Corps	D (m^2s^{-1})
Sucre dans l'eau	0,52 10^{-9}
Sel dans l'eau	1,9 10^{-9}
Vapeur d'eau dans l'air	22 10^{-6}

* Une démonstration sera faite par A. Einstein en 1905

Equation de la diffusion (seconde loi de Fick)

- **A une dimension :**

Equation de continuité $$\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J_n(x,t)}{\partial x} = \sigma_n(x,t)$$

Loi de Fick $$J_n(x,t) = -D\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-D\frac{\partial \rho_n}{\partial x}\right) = \sigma_n$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} + \sigma_n}$$ **Equation de la diffusion**

- **A trois dimensions :**

Equation de continuité $$\frac{\partial \rho_n(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J}_n(\vec{r},t) = \sigma_n$$

Loi de Fick $$\vec{J}_n(\vec{r},t) = -D\vec{\nabla}.\rho_n(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_n}{\partial t} - D\left(\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial z^2}\right) = \sigma_n$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho_n}{\partial t} - D\Delta\rho_n = \sigma_n}$$

Avec l'opérateur Laplacien $$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Hors programme de l'examen

Equation de continuité

ρ : masse volumique, u : densité massique d'énergie interne, ρu : densité volumique d'énergie interne interne, σ_U : création volumique d'énergie interne (en cas de réaction chimique par exemple).

1D

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial J_U}{\partial x} = \sigma_U}$$

3D

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J}_U = \sigma_U}$$

Hors programme de l'examen

Loi de Fourier

- Formellement comparable à la loi de Fick c'est une loi phénoménologique qui établit une relation de proportionnalité entre le vecteur densité de courant thermique et le gradient de température :
- Le signe - signifie que la chaleur va spontanément du chaud vers le froid

1D

$$\boxed{J_U(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}}$$

3D

$$\boxed{\vec{J}_U(\vec{r},t) = -\lambda \vec{\nabla} T(\vec{r},t)}$$

Hors programme de l'examen

Le coefficient λ s'appelle *la conductivité thermique*.

Corps	λ ($Wm^{-1}K^{-1}$)
Cuivre	418
Verre	1,2
Air	$24\ 10^{-3}$
Ciment	0,8
Acier	16 - 24
Bois sec	0,04 - 0,17

Loi de Fourier

$$\boxed{J_U(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}}$$

Equation de continuité

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial J_U}{\partial x} = \sigma_U}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \sigma_U$$

3D

$$\boxed{\vec{J}_U(\vec{r},t) = -\lambda \vec{\nabla} T(\vec{r},t)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J}_U = \sigma_U}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} - \lambda \vec{\nabla}^2 T(\vec{r},t) = \sigma_U$$

Hors programme de l'examen

Equation de conduction de la chaleur

1D

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \sigma_U$$

3D

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} - \lambda \vec{\nabla}^2 T(\vec{r},t) = \sigma_U$$

Hors programme de l'examen

- Comme on considère des transformations sans travail (isochore) on a, avec c_v la capacité calorifique massique à volume constant et u la densité massique d'énergie interne :

$$dU(T,V) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_v dT$$

- Et donc : $$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{C_v}{V} dT \quad \Rightarrow d\rho u = \rho c_v dT \quad \Rightarrow \frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho c_v \frac{dT}{\partial t}$$

Note : c_v est la capacité calorifique *massique* à *volume* constant. Pour des solides $c_v \approx c_p$.

Conduction de la chaleur

Equation de conduction de la chaleur

1D

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_v}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma_U}{\rho c_v}}$$

3D

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_v}\vec{\nabla}^2 T + \frac{\sigma_U}{\rho c_v}}$$

Hors programme de l'examen

Equation de conduction isochore de la chaleur

Le coefficient $\lambda/\rho c_v$ souvent noté a s'appelle la *diffusivité thermique*.

Corps	a (10^{-6} m^2s^{-1})
Cuivre	114
Inox	4
Verre	0,58
Bois	0,45
Eau	0,14

Jean-Baptiste Joseph Fourier
1768 - 1830

Note : c'est en développant des outils mathématiques pour résoudre cette équation que J.B. Fourrier a inventé le développement en séries qui portent son nom.